

TEOREMA FONDAMENTALE DEI NUMERI PRIMI

©Filippo Giordano/2009-Mistretta (ME)

dal libro di Filippo Giordano "La ragione dei primi" in vetrina sul sito internet www.ilmiolibro.it "

Enunciato:

Sia n un numero qualsiasi, naturale e positivo. Per qualsiasi numero n elevato al quadrato esiste sempre un numero primo all'interno dell'insieme numerico compreso fra $\frac{n^2 - n}{2}$ ed n^2 più un altro numero primo compreso nell'insieme numerico compreso fra n^2 e $\frac{n^2 + n}{2}$ tale che fra un qualsiasi n elevato al quadrato e il successivo n elevato al quadrato esistono sempre almeno due numeri primi.

Proposizione

Sia iT (insieme Triangolare) un insieme di numeri naturali positivi consecutivi che partendo dall'1 arriva a un qualsiasi numero $n-1$: (1, 2, 3, ... $n-1$).

Sia iMa (insieme multiplo, a) l'insieme di elementi compresi fra $n(n-1)$ ed n^2 , estremi esclusi, e iMb (insieme multiplo, b) l'insieme di elementi compresi fra n^2 e $n(n+1)$, estremi esclusi.

Proprietà 1

Qualsiasi valore si attribuisca a n il numero degli elementi dell'insieme iMa è sempre uguale al numero degli elementi dell'insieme iMb e ciascuno di essi, a sua volta, ha un numero di elementi uguale a quelli dell'insieme iT .

Esempio 1:

Sia $n = 3$, allora:

gli elementi dello iT sono, per definizione, 1, 2 (=2);

gli elementi dello iMa , compresi fra $3 \times 2 = 6$ e $3 \times 3 = 9$, estremi esclusi, sono 7, 8 (=2);

gli elementi dello iMb , compresi fra $3 \times 3 = 9$ e $3 \times 4 = 12$, estremi esclusi, sono 10, 11 (=2).

Esempio 2:

Sia $n = 4$, allora:

gli elementi dello iT sono, per definizione, 1, 2, 3 (=3);

gli elementi dello iMa , compresi fra $4 \times 3 = 12$ e $4 \times 4 = 16$, estremi esclusi, sono: 13, 14, 15 (=3);

gli elementi dello iMb , compresi fra $4 \times 4 = 16$ e $4 \times 5 = 20$, estremi esclusi sono = 17, 18, 19 (=3).

Lemma 1

L'ordine naturale dei numeri interi positivi è alternato da numeri dispari e pari che si succedono fino all'infinito; partendo da 1, per ogni coppia di elementi consecutivi si ha parità di elementi dispari e pari; per ogni quantità dispari di elementi consecutivi, nell'insieme c'è prevalenza di un elemento dispari.

Proprietà 2

Poiché l' iT è definito con un numero di elementi $n-1$, iT ha un numero di elementi pari se n è dispari mentre ha un numero di elementi dispari se n è pari. Poiché sia il numero degli elementi dell'insieme iMa che quello degli elementi dell'insieme iMb sono anche essi uguali a $n-1$, entrambi tali insiemi hanno un numero di elementi dispari se n è pari mentre hanno un numero di elementi pari se n è dispari.

Esempio 3:

Sia $n = 5$, allora:

gli elementi dello iT sono: 1, 2, 3, 4 (= 4 elementi);

gli elementi dello iMa , estremi esclusi, sono: 21, 22, 23, 24 (= 4 elementi),

gli elementi dello iMb , estremi esclusi, sono: 26, 27, 28, 29 (= 4 elementi).

Esempio 4:

Sia $n = 6$, allora:

gli elementi dello iT sono: 1, 2, 3, 4, 5 (= 5 elementi);

gli elementi dello iMa , estremi esclusi, sono: 31, 32, 33, 34, 35 (= 5 elementi),

gli elementi dello iMb , estremi esclusi, sono: 37, 38, 39, 40, 41 (= 5 elementi).

Proprietà 3

All'interno della simmetria del numero complessivo di elementi di ciascun insieme iT , iMa e iMb è simmetrico anche il numero di elementi pari e dispari di ciascun insieme. Infatti, quando n è dispari l'insieme degli elementi è pari e allora il numero degli elementi di specie dispari è uguale al numero degli elementi di specie pari; invece quando n è pari il numero degli elementi di ciascun insieme è dispari, con prevalenza di elementi dispari.

Esempio 5

Sia $n = 7$, allora:

gli elementi dello iT sono: 1, 2, 3, 4, 5, 6; totale 6, di cui tre dispari e tre pari;

gli elementi dello iMa sono: 43, 44, 45, 46, 47, 48; totale 6, di cui tre dispari e tre pari;

gli elementi dello iMb sono: 50, 51, 52, 53, 54, 55; totale 6, di cui tre dispari e tre pari.

Esempio 6

Sia $n = 8$, allora:

gli elementi dello iT sono: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; totale 7, di cui quattro dispari e tre pari;

gli elementi dello iMa sono: 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63; totale 7, di cui quattro dispari e tre pari;

gli elementi dello iMb sono: 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71; totale 7, di cui quattro dispari e tre pari.

Proprietà 4

a) La somma degli elementi dello iT è data dalla formula di Gauss, (opportunitamente modificata in quanto non comprende n): $n(n-1)/2$.

b) La somma degli elementi dell'insieme iMa è uguale al risultato della formula, $n(n-1)^2 + n(n-1)/2$ in cui la prima parte $[n(n-1)^2]$ è un multiplo della somma degli elementi di iT e la seconda $[n(n-1)/2]$ è uguale a iT .

c) La somma degli elementi dell'insieme iMb è uguale al risultato della formula $(n-1)n^2 + n(n-1)/2$. in cui la prima parte $[(n-1)n^2]$ è un multiplo della somma degli elementi di iT e la seconda $[n(n-1)/2]$ è uguale a iT .

Esempio 7

Sia $n = 9$, allora:

Somma degli elementi $iT = n(n-1)/2 = 9 \times 8 : 2 = 36$;

Somma degli elementi $iMa = n(n-1)^2 + n(n-1)/2 = (9 \times 8 \times 8) + (9 \times 8:2) = 576 + 36 = 612$;

Somma degli elementi $iMb = (n-1)n^2 + n(n-1)/2 = (8 \times 9 \times 9) + (9 \times 8:2) = 648 + 36 = 684$;

Esempio 8

Sia $n = 10$, allora:

Somma degli elementi $iT = n(n-1)/2 = 10 \times 9 : 2 = 45$;

Somma degli elementi $iMa = n(n-1)^2 + n(n-1)/2 = (10 \times 9 \times 9) + (10 \times 9:2) = 810 + 45 = 855$;

Somma degli elementi $iMb = (n-1)n^2 + n(n-1)/2 = (9 \times 10 \times 10) + (10 \times 9:2) = 900 + 45 = 945$;

Considerazioni di passaggio:

La formula identifica sia nello *iMa* che nello *iMb* una parte (la prima) comune a tutti gli elementi (come fosse il cognome di un nucleo di fratelli appartenenti allo stesso ceppo familiare, mi si perdoni il paragone che esula dal gergo matematico ma che rende l'idea della appartenenza).

Per realizzare la formula ho immaginato ciascuno degli elementi *iMa* e *iMb* come sostenuto da una base comune. Qual'è tale base? Consideriamo $n = 9$. Gli otto elementi *iMa* sono i numeri 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80. La loro base comune è uguale al valore dell'elemento più piccolo -1, cioè $n^2(n-1) = 9 \times 8 = 72$. Tale valore, moltiplicato per il numero degli elementi, ci dà la somma complessiva della base. $72 \times 8 = 576$. Al valore complessivo della base comune bisogna sommare il valore della differenza fra ciascun elemento con la base. Perciò abbiamo: $72 + 1 = 73$; $72 + 2 = 74$; $72 + 3 = 75$; $72 + 4 = 76$; $72 + 5 = 77$; $72 + 6 = 78$; $72 + 7 = 79$; $72 + 8 = 80$; Come si può facilmente notare il valore di ciascuna di tali differenze ricalca, passo a passo, il valore degli attinenti elementi *iT*: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (come fosse il nome di battesimo). Per quantificare il valore complessivo delle differenze dello *iMa* dal valore della base non si deve fare altro che usare la stessa formula usata per quantificare la somma degli elementi *iT*. Lo stesso procedimento si usa con la base *iMb* che, invece, è data dal valore di n^2 , essendo tutti i suoi elementi successivi allo stesso n^2 . Si ha, infine, quindi $\underline{81 \times 8} + \underline{8 \times 9 / 2}$. Da notare che:

Proprietà 5

Per lo stesso valore di n , sia la somma del valore delle basi che la somma del valore delle differenze (*iMa* e *iMb*) è sempre divisibile per la somma del valore degli elementi *iT*.

Esempio 9

Sia $n = 9$,

la somma dei valori degli elementi *iMa* pari a 576 divisa per la somma dei valori degli elementi *iT*, pari a 36, è uguale a 16, mentre la somma delle differenze fra basi e valori degli elementi *iMa* (36), risulta identica alla somma degli elementi *iT*: $36 = 1$ mentre, per *iMb* si ha $648 : 36 = 18$; $36:36=1$. Inoltre, in particolare,

Proprietà 6

a) La somma dei valori degli elementi dell'insieme *iMa* è sempre divisibile per la somma dei valori degli elementi *iT* il risultato è dato dalla formula $2n-1$.

b) La somma dei valori degli elementi dell'insieme *iMb* è sempre divisibile per la somma dei valori degli elementi *iT* il risultato è dato dalla formula $2n + 1$.

Esempio 10

Sia $n = 9$, allora:

$$2n-1 = 17;$$

$$2n+1 = 19;$$

$$iT = 36;$$

$$iMa = 612;$$

$$iMb = 684;$$

allora:

$$(iMa) 612 : (iT) 36 = 17 = 2n-1;$$

$$(iMb) 684 : (iT) 36 = 19 = 2n+1;$$

Esempio 11

Sia $n = 10$, allora:

$$2n-1 = 19;$$

$$2n+1 = 21;$$

$$iT = 45;$$

$$iMa = 855;$$

$$iMb = 945;$$

allora:

$$(iMa) 855 : (iT) 45 = 19 = 2n-1;$$

$$(iMb) 945 : (iT) 45 = 21 = 2n+1.$$

Proprietà 7

Per lo stesso valore di n , la somma dei valori degli elementi dispari degli iMa e iMb è sempre divisibile per la somma dei valori degli elementi dispari iT .

Esempio 12:

Sia $n = 15$

La somma dei valori degli elementi dispari iMa ($211 + 213 + 215 + 217 + 219 + 221 + 223 = 1519$) diviso la somma dei valori degli elementi iT corrispondenti ($1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$) è il numero intero 31, a sua volta uguale a $2n+1$

Lemma 2

Per ogni numero naturale n si dicono *banali* i fattori 1 e n ; mentre tutti gli altri fattori sono detti *non banali*.

Proprietà 8

Ciascun elemento sia dell'insieme iMa che sia dell'insieme iMb , essendo compreso fra due multipli consecutivi di n , di cui uno corrispondente a n^2 (rispettivamente fra $(n-1)n$ e n^2 e fra n^2 e $n(n+1)$), ha come propri fattori sempre un numero inferiore ad n e un numero superiore ad n , con la peculiarità che complessivamente, sia **tutti gli elementi dell'insieme iMa** che **tutti gli elementi dell'insieme iMb comprendono, sempre e sistematicamente, fra i propri fattori minori di n , tutti gli elementi dell'insieme iT , compreso il fattore banale 1** con la caratteristica che in uno o più elementi iMa o iMb possono contemporaneamente confluire diversi fattori minori di n , cioè causando una molteplice presenza di altri elementi iMa o iMb con gli stessi fattori minori di n , compreso il fattore banale 1.

Esempio 13

Sia $n = 11$, allora:

elementi di iMa , fattore massimo, minore di n

111.....	3
112.....	8
113.....	1
114.....	6
115.....	5
116.....	2

117.....	9
118.....	4
119.....	7
120	10

Tutti gli elementi di iMa hanno un fattore minore di $n = 11$, fra loro diversi. Tutti i fattori sono presenti e nessuno è ripetuto.

Esempio 14

Sia $n = 11$, allora:

elementi di iMb, fattore massimo,minore di n

122	4
123	3
124	2
125	5
126	6, 7, 9
127	1
128	8
129	3
130	10
131	1

Si noti che tutti gli elementi di iMb hanno almeno un fattore minore di $n = 11$. Tutti i fattori minori di $n = 11$ sono presenti. Su un elemento iMb (126) confluiscono tre fattori minori di n (6, 7, 9) di cui due (6 e 9) sono multipli del 3. Tale concomitanza dei due multipli del 3 è causa stessa della ripetizione del 3 al suo naturale passo successivo (elemento iMb 129). A sua volta la confluenza del fattore 7 è causa della ripetizione del fattore banale 1 presente due volte (elementi 127 e 131).

Esempio 15:

Per $n = 101$, sono 100 gli elementi iMa consecutivi, estremi esclusi che partendo da 10.101 arrivano a 10.200 dei quali si mostrano i fattori maggiori, minori di n . Tali fattori rappresentano tutti gli elementi Ita (1, 2, 3, ..., 100) nessuno escluso, compreso il fattore *banale* 1, 12 volte presente, poiché al contempo, su diversi elementi iMa confluiscono più fattori.

Elementi Fattori

10.101:	91, 39, 37
10.102:	2
10.103:	1
10.104:	24
10.105:	43
10.106:	62
10.107:	9
10.108:	28
10.109:	11
10.110:	30
10.111:	1
10.112:	64

10.113: 3
10.114: 26
10.115: 85, 35
10.116: 36
10.117: 67
10.188: 2
10.119: 3
10.120: 92, 88, 40
10.121: 29
10.122: 42
10.123: 53
10.124: 4
10.125: 81, 75, 45
10.126: 83, 61
10.127: 41, 19
10.128: 48
10.129: 7
10.130: 10
10.131: 33
10.132: 68
10.133: 1
10.134: 18
10.135: 5
10.136: 56
10.137: 93
10.138: 74
10.139: 1
10.140: 78, 65, 60, 52
10.141: 1
10.142: 22
10.143: 69, 63, 49
10.144: 32
10.145: 5
10.146: 89, 57, 38
10.147: 73
10.148: 86, 59
10.149: 51
10.150: 70, 58, 50
10.151: 1
10.152: 94, 72, 54
10.153: 71, 13
10.154: 2
10.155: 15
10.156: 4
10.157: 7
10.158: 6
10.159: 1
10.160: 80
10.161: 9
10.162: 2
10.163: 1

10.164: 84, 77, 66, 44
 10.165: 95
 10.166: 46, 34
 10.167: 3
 10.168: 82, 8
 10.169: 1
 10.170: 90
 10.171: 7
 10.172: 4
 10.173: 3
 10.174: 2
 10.175: 55, 25
 10.176: 96
 10.177: 1
 10.178: 14
 10.179: 87, 27
 10.180: 20
 10.181: 1
 10.182: 6
 10.183: 17
 10.184: 76
 10.185: 97, 21
 10.186: 22
 10.187: 61
 10.188: 12
 10.189: 23
 10.190: 5
 10.191: 79
 10.192: 98, 16
 10.193: 1
 10.194: 6
 10.195: 5
 10.196: 4
 10.197: 99
 10.198: 2
 10.199: 47, 31
 10.200: 100.

Più specificatamente, gli elementi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 22 si ripetono oltre alla loro normale rappresentanza, complessivamente, altre 31 volte. Nel contempo 31 fattori (nell'ordine di apparizione: 39, 37, 88, 40, 75, 45, 61, 19, 65, 60, 52, 63, 49, 57, 38, 59, 58, 50, 72, 54, 13, 77, 66, 44, 34, 8, 25, 27, 21, 16, 31) confluiscono in postazioni già occupate da altri fattori. Il fenomeno, quindi, conferma una dinamica che consente a tutti gli elementi iT di esseri tutti presenti, almeno una volta, nella veste di fattori di iMa, con la tendenza dei fattori minori ad essere ripetutamente presenti.

Tale dinamica è implicita alla proprietà sia dell'iMa che sia dell' iMb perché le somme degli elementi dell'uno e dell'altro sono sempre divisibili per la somma del corrispondente iT.

Lemma 3

Nella scala naturale dei numeri ogni numero dispari è sempre seguito da un numero pari.

Ogni numero dispari è prodotto di due fattori dispari. Ogni numero pari maggiore di 2 o è prodotto di due fattori pari oppure è prodotto di un fattore pari e uno dispari maggiore di 1.

Lemma 4

I multipli di ogni numero dispari si succedono cronologicamente divenendo alternativamente pari, dispari, pari, dispari fino all'infinito (3, 6, 9, 12, 15...; 5, 10, 15, 20, 25 ...; 7, 14, 21, 28, 35 ...)

Lemma 5

I multipli di ogni numero pari, essendo prodotti di almeno un fattore pari, si estrinsecano sempre in numeri pari (2, 4, 6, 8, 10 ...; 4, 8, 12, 16, 20...; 6, 12, 18, 24, 30 ...).

Conclusioni:

Tre ragionamenti per assurdo:

a) Sia $n = 6$

Supponiamo, per assurdo, di non conoscere gli elementi dell'iMa e dell'iMb e ipotizziamo che i loro fattori minori di n siano disposti in maniera tale che ciascun elemento abbia un fattore diverso dal banale 1 e che pertanto nessuno di tali elementi sia un numero primo. Ipotizziamo perciò che gli elementi abbiano, nell'ordine, i seguenti fattori

- 2
- 3
- 4
- 5
- 2, 3

Sembra una sequenza logicamente possibile in quanto sono tutti fattori inferiori a 6 e in ultima posizione i due fattori 2 e 3 seguono, a passo corretto, loro precedenti multipli o uguali. Tuttavia tale sequenza è impossibile per la ragione che tali fattori appartengono rispettivamente a elementi pari, dispari, pari, dispari, pari che contrastano con la proprietà 3 la quale afferma che “*quando n è pari il numero degli elementi di ciascun insieme è dispari, con prevalenza di elementi dispari.*” Infatti, contrariamente a quanto stabilito da tale proprietà in questo caso avremmo una prevalenza di elementi pari, a distanza innaturale da n . Infatti se tali fattori appartenessero a elementi iMa, che precedono n^2 , ci troveremmo di fronte al caso che l'elemento ultimo essendo divisibile per 2 dovrebbe essere un numero pari e poiché $n = 6$ al quadrato è anche numero pari, avremmo due numeri naturali consecutivi entrambi pari. D'altronde se gli elementi appartenessero allo iMb ci troveremmo nella identica situazione in quanto il primo elemento, che è il successivo a n^2 , essendo divisibile per 2 dovrebbe necessariamente essere numero pari e perciò avremmo due numeri naturali consecutivi entrambi pari.

b) Sia $n = 14$

Supponiamo anche qui, per assurdo, di non conoscere gli elementi dell' iMa e dell' iMb e ipotizziamo che i loro fattori minori di n siano disposti in maniera tale che ciascun elemento abbia un fattore diverso dal banale 1 e che pertanto nessuno di tali elementi sia un numero primo. Ipotizziamo perciò che gli elementi abbiano, nell'ordine, i seguenti fattori:

- 11
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7
- 8
- 9
- 10
- 11
- 12
- 13

Sembra una sequenza logicamente possibile in quanto sono tutti fattori inferiori a 14; i fattori disposti alternativamente in dispari e pari sono indice di elementi dispari - pari che si alternano correttamente secondo le disposizioni del lemma 3; la prevalenza dei dispari in presenza di n pari è pure corretta, secondo la proprietà n.3. Potremmo, quindi, trovarci davanti al caso di un iMa o iMb in cui non sia presente un numero primo. Invece... la distanza fra i due fattori 11 è anomala in quanto fra i due invece che una distanza dispari uguale 11 esiste una distanza 10. Infatti il secondo 11 dovrebbe trovarsi al posto del 12 o comunque accanto ad esso. Ma quale fattore possiamo quindi mettere al posto dell'11? Non possiamo ipotizzare un fattore pari perché ci troveremmo di fronte a tre pari consecutivi né possiamo ipotizzare alcun altro dispari perché non rispetteremmo la cadenza naturale di ciascuno di loro (il 3 ha cadenza nel 12, il 5 ha cadenza nel 10, il 7 non ha spazio per replicarsi e così anche il 9 e il 13. L'unica prospettiva possibile resta il fattore banale 1.

c) divisibilità di iMa e iMb

Se, per assurdo, un qualsiasi *insieme multiplo*, a (iMa) oppure un qualsiasi *insieme multiplo* b (iMb) non avesse al proprio interno alcun elemento con fattore banale 1 allora la rispondenza biunivoca con gli elementi iT dovrebbe fare a meno dell'elemento 1 dello insieme Triangolare (iT), ma ciò, essendo il numero 1 parte minima indispensabile dello insieme iT , causerebbe:

- 1) la non perfetta divisibilità della somma dei valori degli elementi di iMa e/o iMb per la somma dei valori degli elementi di iT ;
- 2) la non perfetta divisibilità della somma dei valori dei soli elementi dispari iMa e/o iMb per la somma dei valori dei soli elementi dispari di iT ;

e quindi una imperfezione dentro un sistema perfetto.

Invece:

Per ogni valore attribuito ad n , ciascun elemento dello iT (insieme triangolare), essendo ciascuno di valore inferiore a n , troverà identificazione col fattore -di pari valore- di un suo multiplo in almeno uno degli elementi dello *insieme Multiplo a* (iMa) ed -inoltre- troverà altra identificazione col fattore -di pari valore- di un suo multiplo in almeno uno degli elementi dello *insieme Multiplo b*

(iMb). Infatti, ciascun elemento iT, partendo dalla propria postazione naturale e procedendo con passo adeguato al proprio valore, giungerà in ciascuno degli insiemi iMa e iMb, trovando negli elementi dei due insiemi, i propri multipli con fattore minore di n identico all'elemento iT.

Successivamente, se vi è la capienza, troverà altri propri multipli con fattore minore di n , a loro volta multipli dello elemento iT, ma loro stessi identici ad altro elemento iT minore di n , oppure ritroverà sé stesso perché nel precedente suo multiplo sono contemporaneamente confluiti diversi suoi multipli con fattori minori di n , primi fra loro. Allora è evidente che, essendo il numero degli elementi iT, iMa, iMb, tutti uguali a $n-1$ ed essendo i fattori non banali sempre uguali a $n-2$ (mancando il banale 1), sia iMa che iMb conserveranno alla fine del processo almeno un elemento non fattorizzabile per alcun elemento non banale e quindi, per esclusione, tale elemento è esclusivamente divisibile per *solo e soltanto* il fattore banale 1 (fra i fattori minori di n) e solo e soltanto per sé stesso per i fattori maggiori di n .

Come volevasi dimostrare.

FUNDAMENTAL THEOREM OF PRIME NUMBERS

©Filippo Giordano/2009-Mistretta (ME)

per Mistrettanews2009

dal libro di Filippo Giordano *La ragione dei primi*, in vetrina sul sito internet www.ilmiolibro.it

**Proprietà letteraria e scientifica riservata in tutti i paesi
in cui sono in vigore le norme in materia di diritto d'autore.
E' vietata la riproduzione, anche parziale del testo, e con qualsiasi mezzo,
senza l'autorizzazione scritta dell'autore.**